PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE BALEARES

SEPTIEMBRE - 2009

RESUELTOS

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4.
Se valorará la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático o no matemático) utilizado por el alumno. Penalizan los errores de cálculo. Los errores graves, y especialmente, aquellos que lleven a resultados incoherentes o absurdos, serán penalizados con la aplicación del 50 % sobre la calificación en cuestión. Se valorarán todas las partes que sean correctas, aunque el resultado final no lo sea.

OPCIÓN A

1º) Demuestra que las matrices X reales, 2x2, tales que $X \cdot X^T = I$ son precisamente las que tienen la forma $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ o bien $\begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}$, con $x^2+y^2=1$.

(X^T indica la matriz traspuesta de X e I indica la matriz identidad).

Siendo $X=\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$, su traspuesta es $X^T=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$. Siendo $x^2+y^2=1$:

$$X \cdot X^T = I \Rightarrow \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+y^2 & xy-xy \\ xy-xy & y^2+x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{X \cdot X^T = I \quad (c.q.d.)}}.$$

Siendo $X=\begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}$, su traspuesta es $X^T=\begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}$. Siendo $x^2+y^2=1$:

$$X \cdot X^T = I \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+y^2 & xy-xy \\ xy-xy & y^2+x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{X \cdot X^T = I \quad (c.q.d.)}}.$$

****

2º) Estudia la posición relativa de los siguientes planos, según los valores de m: $\pi_1 \equiv x+y=1$, $\pi_2 \equiv my+z=0$ y $\pi_3 \equiv x+(1+m)y+mz=m+1$.

Siendo M y M' las matrices de coeficientes y ampliada, respectivamente, que determinan los tres planos, según sus rangos, pueden presentarse los seis siguientes casos:

Rango M = Rango M' = 3 → S. C. D. → Los tres planos se cortan en un punto.

Rango M = Rango M' = 2 → S. C. I. → Los tres planos se cortan en una recta.

Rango M = Rango M' = 1 → S. C. I. → Los tres planos son coincidentes.

Rango M = 2 ;; Rango M' = 3 → S. I. → Dos planos paralelos cortados por el 3º.

Rango M = 1 ;; Rango M' = 3 → S. I. → Los tres planos son paralelos.

Rango M = 1 ;; Rango M' = 2 → S. I. → Dos planos coincidentes y secantes al 3º.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & m & 1\\ 1 & 1+m & m\end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & m & 1 & 0\\ 1 & 1+m & m & m+1\end{pmatrix}.$$

$$Rango\ \ M \Rightarrow |M|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & m & 1\\ 1 & 1+m & m\end{vmatrix}=m^2+1-(1+m)=m^2+1-1-m=m^2-m=m(m-1)=0 \Rightarrow .$$

$$\Rightarrow \underline{m_1=0} \;;;\; \underline{m_2=1}$$

Para m = 0 es $M'=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1=C_2=C_4\} \Rightarrow \underline{Rango\ \ M=Rango\ \ M'=2}$

Para m = 0 los tres planos se cortan en una recta.

Para m = 1 es $M'=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ \ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=2-1=1\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M'=3}$$

Para m = 1 son dos planos paralelos y cortados por el tercero.

****

3º) Se considera la función $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}$. Se pide:

a) Determinar los extremos relativos.

b) Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)$.

----

a)

Para que una función tenga extremos relativos es necesario que se anule su primera derivada:

$$f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{1+x+x^2}}=0 \;\Rightarrow\; 2x+1=0 \;\;;;\;\; \underline{x=-\frac{1}{2}}.$$

Para diferenciar si se trata de un mínimo o un máximo relativo hay que recurrir a la segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot\sqrt{1+x+x^2}-(2x+1)\cdot\frac{2x+1}{2\sqrt{1+x+x^2}}}{1+x+x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{4(1+x+x^2)-(2x+1)^2}{2\sqrt{1+x+x^2}}}{1+x+x^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4+4x+4x^2-(4x^2+4x+1)}{2(1+x+x^2)\sqrt{1+x+x^2}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4+4x+4x^2-4x^2-4x-1}{(1+x+x^2)\sqrt{1+x+x^2}}=\underline{\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{1+x+x^2}}{(1+x+x^2)}=f''(x)}$$

$$f''\left(-\tfrac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}}{\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)}=\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}>0 \;\Rightarrow\; \underline{\textit{Mínimo relativo para } x=-\frac{1}{2}}.$$

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right)=\sqrt{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\textit{Mínimo relativo}:\; P\left(-\frac{1}{2},\;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}}.$$

b)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+x+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1\right)}=\sqrt{\infty(0+0+1)}=\sqrt{\infty}=\underline{\underline{\infty}}.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+x+x^2}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1\right)}=\sqrt{\infty(0-0+1)}=\sqrt{\infty}=\underline{\underline{\infty}}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{2\sqrt{1+x+x^2}}=\frac{\infty}{\infty}\;\Rightarrow\; In\det.\;\Rightarrow\;\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{2\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}}=\frac{2+0}{2\sqrt{0+0+1}}=$$

$$= \frac{2}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = \underline{\underline{1}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f'(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x+1}{2\sqrt{1+x+x^2}} = \frac{-\infty}{\infty} \Rightarrow In\det. \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{2\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}} = \frac{2-0}{2\sqrt{0-0+1}} =$$

$$= \frac{2}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = \underline{\underline{1}}$$

****

4º) Utilizando los teoremas de Bolzano y Rolle, demostrar que la ecuación $x^2 = x\,sen\;x + \cos\;x$ tiene exactamente dos soluciones en el intervalo $[-\pi,\;\pi]$.

Considerando la función $f(x) = x^2 - x\,sen\;x - \cos\;x$, que es continua y derivable en R por ser suma algebraica de funciones continuas y derivables en R.

Teniendo en cuenta que $sen\;(-x) = -sen\;x$ y que $\cos\;(-x) = \cos\;x$, la función f(x) es simétrica con respecto al eje de ordenadas, por ser f(-x) = f(x), como se prueba a continuación:

$$f(-x) = (-x)^2 - (-x)\,sen\;(-x) - \cos\;(-x) = x^2 - x\,sen\;x - \cos\;x = f(x),\;\; \underline{c.q.p.}.$$

Considerando que:

$$f(-\pi) = (-\pi)^2 - (-\pi)\,sen\;(-\pi) - \cos\;(-\pi) = \pi^2 + \pi\cdot 0 - (-1) = \pi^2 + 1 > 0$$

$$f(0) = 0^2 - 0\,sen\;0 - \cos\;0 = 0 - \pi\cdot 0\cdot 0 - 1 = -1 < 0\,.$$

Según el Teorema de Bolzano, en el intervalo (-π, 0) la función f(x) tiene, al menos, una raíz x = a, siendo -π < a < 0 y tal que f(a) = 0.

Vamos a demostrar ahora que la raíz es única.

Si la función tuviera al menos otra raíz real positiva en el intervalo considerado, $x = b$, indicaría que f(b) = 0, con lo cual se podría aplicar a la función f(x) el Teorema de Rolle, teniendo en cuenta lo expresado en el primer párrafo.

Siendo b > a, tendría que existir un valor positivo c, tal que a < c < b, para el cual se anularía la derivada de la función, es decir: $f'(c) = 0$, y esto, como vamos a demostrar a continuación es imposible:

$$f'(x) = 2x - (1\cdot sen\;x + x\cdot\cos\;x) + sen\;x = 2x - sen\;x - x\cos\;x + sen\;x = 2x - x\cos\;x =$$

$$= x(2 - \cos\;x)\;\Rightarrow\; f'(c) = c(2 - \cos\;c)\;\Rightarrow\; 2 - \cos\;c \neq 0\;\Rightarrow\; c = 0\;\Rightarrow\; c \notin (-\pi,\;0)$$

$\underline{f'(c) \neq 0,\;\forall c \in (-\pi,\;0)}$, lo cual contradice el Teorema de Rolle y, en consecuencia, demuestra que la función tiene una sola raíz en el intervalo $(-\pi,\;0)$ y, teniendo en cuenta la simetría de la función:

$\underline{\underline{La\;\;ecuación\;\;x^2 = x\,sen\;x + \cos\;x\;\;tiene,\;exáctamente,\;dos\;\;raíces\;\;en\;\;[-\pi,\;\pi]}}$. $\underline{\text{(c.q.d.)}}$

****

OPCIÓN B

1º) Determinar el rango de la matriz real $A=\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix}$, según los valores de α. Resolver el sistema $A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en el caso de α = 0.

$$|A|=\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix}=4(a+1)+a+a-2-a^2(a+1)-2=4a+4+2a-4-a^3-a^2=$$

$$=-a^3-a^2+6a=0\ ;;\ -a\left(a^2+a-6\right)=0\ \Rightarrow\ \underline{a_1=0}\ ;;\ a^2+a-6=0\ ;;\ a=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}\ \Rightarrow\ \underline{a_2=-3}\ ;;\ \underline{a_3=2}$$

$$Para\ \ a=0\ \Rightarrow\ A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ A=2}.$$

$$Para\ \ a=-3\ \Rightarrow\ A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ A=2}.$$

$$Para\ \ a=2\ \Rightarrow\ A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ A=2}$$

$$\underline{\underline{Para\ \left\{\begin{matrix} a\neq -3 \\ a\neq 0 \\ a\neq 2 \end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ Rango\ \ A=3}}\ \ ;;\ \ \underline{\underline{Para\ \left\{\begin{matrix} a=-3 \\ a=0 \\ a=2 \end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ Rango\ \ A=2}}$$

Para α = 0 el sistema resulta: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \left\{\begin{matrix} x+y+z=0 \\ x+2y+z=0 \\ x+y+2z=0 \end{matrix}\right.$.

Siendo Rango A = 2 el sistema homogéneo, además de la solución trivial: x = 0, y = 0, z = 0, el sistema tiene infinitas soluciones; se obtienen despreciando una ecuación, por ejemplo la tercera, y parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo, $\underline{z=\lambda}$:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=-\lambda \\ x+2y=-\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x-y=\lambda \\ x+2y=-\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{y=0} \;\;;;\;\; \underline{x=-\lambda}.$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=-\lambda \\ y=0 \qquad \forall \lambda \in R \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

****

2º) Sea r la intersección de los planos $\begin{cases} \pi_1 \equiv ax+by+cz+d=0 \\ \pi_2 \equiv a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$. Se considera la familia de planos de la forma $\beta \equiv ax+by+cz+d+k(a'x+b'y+c'z+d')=0$, donde k es un parámetro real. Se pide:

a) Demostrar que la recta r está contenida en todos los planos de la familia β.

b) Calcular el plano de la familia $\gamma \equiv 2x-y+z+1+k(x+y+z-2)=0$ que se encuentre a una unidad de distancia del origen de coordenadas.

----

a)

La expresión de r por dos ecuaciones implícitas es $r \equiv \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$.

La familia de planos $\beta \equiv ax+by+cz+d+k(a'x+b'y+c'z+d')=0$ constituyen el haz de los infinitos planos que tienen en común, precisamente, a la recta , de donde se deduce, por definición, lo pedido:

$$\underline{\underline{\forall k \in R \;\; la \;\; recta \;\; r \;\; está \;\; contenida \;\; en \;\; la \;\; familia \;\; de \;\; planos \;\; \beta}}$$

b)

La familia de planos $\gamma \equiv 2x-y+z+1+k(x+y+z-2)=0$ puede expresarse de la forma $\gamma \equiv (2+k)x+(k-1)y+(1+k)z+(1-2k)=0$.

La distancia del plano $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ al origen de coordenadas viene dada por la fórmula $d(O,\ \pi)=\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, que aplicada al caso que nos ocupa es:

$$d(O,\ \pi)=\frac{|1-2k|}{\sqrt{(2+k)^2+(k-1)^2+(1+k)^2}}=1 \;\;;;\;\; (1-2k)^2=(2+k)^2+(k-1)^2+(1+k)^2 \;\;;;$$

$$1-4k+4k^2=4+4k+k^2+k^2-2k+1+1+2k+k^2 \;\;;;\;\; -4k+k^2=5+4k \;\;;;\;\; k^2-8k-5=0.$$

$$k=\frac{8\pm\sqrt{64+20}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{84}}{2}=\frac{8\pm 2\sqrt{21}}{2}=4\pm\sqrt{21} \Rightarrow \underline{k_1=4-\sqrt{21}} \;\;;;\;\; \underline{k_2=4+\sqrt{21}}.$$

Los planos que cumplen la condición pedida son los siguientes:

$$\underline{\underline{\gamma_1 \equiv 2x-y+z+1+\left(4-\sqrt{21}\right)(x+y+z-2)=0}} \;\; y \;\; \underline{\underline{\gamma_2 \equiv 2x-y+z+1+\left(4+\sqrt{21}\right)(x+y+z-2)=0}}$$

****

3º) Calcular los puntos de la curva $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ en los cuales la pendiente de la recta tangente es 1.

La pendiente de la recta es m = 1.

La curva puede expresarse de la forma: $x^2+2y^2=4$;; $\underline{y=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4-x^2}}$.

La pendiente a una curva en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$$y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=1\ ;;\ \frac{-x}{2\sqrt{4-x^2}}=1\ ;;\ -x=2\sqrt{4-x^2}\ ;;\ x^2=4\left(4-x^2\right)=16-4x^2\ ;;\ 5x^2=16\ ;;$$

$$x^2=\frac{16}{5}\ ;;\ x=\pm\sqrt{\frac{16}{5}}=\pm\frac{4}{\sqrt{5}}=\pm\frac{4\sqrt{5}}{5}\ \Rightarrow\ \underline{x_1=-\frac{4\sqrt{5}}{5}}\ ;;\ \underline{x_2=\frac{4\sqrt{5}}{5}}.$$

Los puntos de tangencia son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\\ x^2=\frac{16}{5}\end{array}\right\}\Rightarrow\ \frac{\frac{16}{5}}{4}+\frac{y^2}{2}=1\ ;;\ \frac{4}{5}+\frac{y^2}{2}=1\ ;;\ \frac{y^2}{2}=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}\ ;;\ y^2=\frac{2}{5}\ ;;\ y=\pm\sqrt{\frac{2}{5}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=$$

$$=\pm\frac{\sqrt{10}}{5}\ \Rightarrow\ \underline{y_1=-\frac{\sqrt{10}}{5}}\ ;;\ \underline{y_2=\frac{\sqrt{10}}{5}}.$$

Teniendo en cuenta que la curva es una parábola simétrica con respecto a los ejes y al origen, los puntos de tangencia pertenecen a los cuadrantes segundo y cuarto; los puntos de tangencia son:

$$\underline{\underline{P\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5},\ \frac{\sqrt{10}}{5}\right)\ y\ Q\left(\frac{4\sqrt{5}}{5},\ -\frac{\sqrt{10}}{5}\right)}}$$

****

4º) Dada la función $f(x)=\begin{cases} 0 & si \;\; x=0 \\ x\,L\,x & si \;\; x>0 \end{cases}$ $(L\,x=\log_e x)$, se pide:

a) Estudiar la continuidad.

b) Calcular el área de la región limitada por la curva y = f(x) y las rectas y = 0, x = k, $x=1$, donde k es la abscisa del mínimo de la función. Hacer un dibuja de la región.

----

a)

La función es continua en su dominio, que es $[0,\ +\infty)$, excepto para x = 0, cuya continuidad por la derecha es dudosa; se estudia a continuación.

Para que la función sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ sea igual al valor de la función en ese punto, o sea: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}(x\,L\,x)=0\cdot(-\infty)\Rightarrow In\det.\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{L\,x}{\frac{1}{x}}=\frac{-\infty}{\infty}\Rightarrow In\det.\Rightarrow\{L'\,Hopital\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=-\lim_{x\to 0} x=\underline{0}\ \Rightarrow\ \underline{f(x)\ es\ continua\ por\ la\ derecha\ en\ x=0}$$

<u>La función es continua en su dominio.</u>

b)

Los puntos de corte de la función con el eje X son los siguientes:

$$x\cdot L\,x=0\Rightarrow\begin{cases} x=0\ \to\ \underline{O(0,\ 0)} \\ x=1\ \to\ \underline{A(1,\ 0)} \end{cases}$$

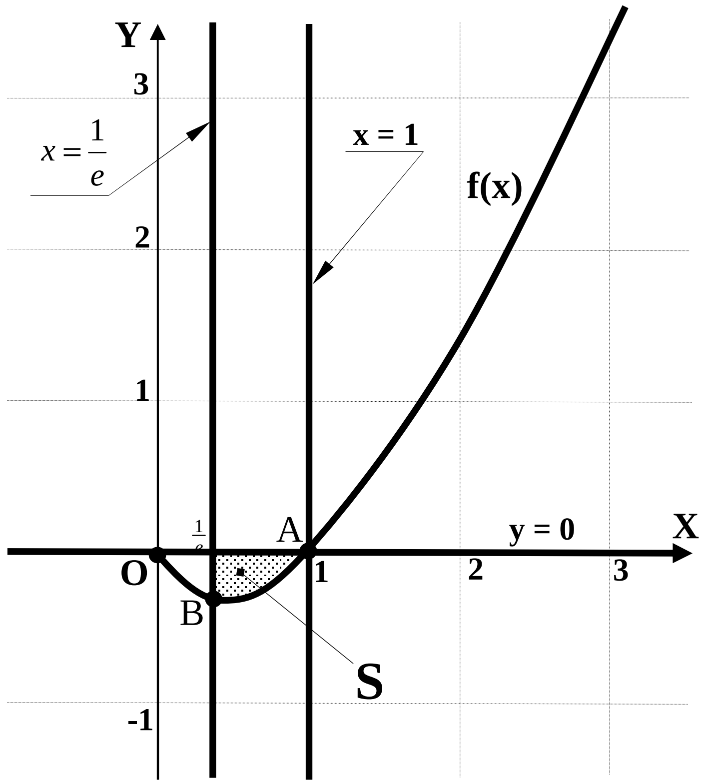
Vamos a determinar ahora el mínimo de la función, para lo cual consideremos la función $f(x)=x\cdot L\,x$.

$$f'(x)=1\cdot L\,x+x\cdot\frac{1}{x}=L\,x+1\ \ ;;\ \ f'(x)=0\Rightarrow L\,x+1=0\ \ ;;\ \ L\,x=-1\ \ ;;\ \ \underline{x=e^{-1}}$$

$$f''(x)=\frac{1}{x}\ \ ;;\ \ f''(e^{-1})=\frac{1}{e^{-1}}=e>0\ \Rightarrow\ \underline{Mínimo}$$

$$f(e^{-1})=e^{-1}\cdot L\,e^{-1}=\frac{1}{e}\cdot(-1)=-\frac{1}{e}\ \Rightarrow\ \underline{Mín\ \Rightarrow\ B\left(\frac{1}{e},\ -\frac{1}{e}\right)}$$

Teniendo en cuenta lo anterior y que la función en convexa $(\cup)$ en su dominio, por ser la segunda derivada positiva para cualquier valor real de x perteneciente al domino, la representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



Como todas las ordenadas de la superficie que vamos a calcular son negativas, cambiamos los límites de integración:

$$A = \int_1^{\frac{1}{e}} x \cdot L\,x \cdot dx \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} Lx = u \to \frac{1}{x} \cdot dx = du \\ x\,dx = dv \to v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; A = \left[L\,x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \right]_1^{\frac{1}{e}} =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \cdot L\,x - \frac{1}{2} \cdot \int x \cdot dx \right]_1^{\frac{1}{e}} = \left[\frac{x^2}{2} \cdot L\,x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_1^{\frac{1}{e}} = \left[\frac{x^2}{4} \left(2\,L\,x - 1 \right) \right]_1^{\frac{1}{e}} =$$

$$= \left[\frac{\left(\frac{1}{e} \right)^2}{4} \left(2\,L \frac{1}{e} - 1 \right) \right] - \left[\frac{1^2}{4} \left(2\,L\,1 - 1 \right) \right] = \left[\frac{1}{4e^2} \left(-2 - 1 \right) \right] - \left[\frac{1}{4} \cdot \left(0 - 1 \right) \right] = -\frac{3}{4e^2} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 - 3}{4e^2} \cong$$

$$\cong \frac{7'39 - 3}{29'56} = \frac{4'39}{29'56} = \underline{\underline{0'15\ u^2 = S}}$$

****